СОВЕРШЕННЫЕ И ДРУЖЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

Составитель О. А. Старова

Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны…

Никомах Герасский, славный грек, знаменитый философ и математик

Совершенным называют натуральное число, равное сумме всех своих положительных делителей, включая 1, но исключая само число.

По мере того как натуральные числа возрастают, совершенные числа встречаются всё реже.

Наименьшим совершенным числом является 6:

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Следующее совершенное число — 28:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Особенный («совершенный») характер чисел 6 и 28 был признан в культурах, базирующихся на религиях, которые признают Священное писание Ветхого Завета. Они утверждают, что Бог сотворил мир за 6 дней, и обращают внимание на то, что Луна совершает оборот вокруг Земли примерно за 28 дней.

Сколько совершенных чисел?

Первым совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число 6. Шестое место на званом пиру отводили самому уважаемому, самому знаменитому, самому почётному гостю.

Следующим известным древним совершенным числом, было число 28. В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала расположены 28 келий. Это здание принадлежало неопифагорейской академии наук. В ней было 28 членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давно забыты, полагалось иметь во многих научных обществах.

До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько таких чисел может быть. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде

$$2^{p-1} \cdot \left(2^p - 1\right),$$

где $2^p - 1$ — простое число, является совершенным.

Благодаря своей формуле, Евклид сумел найти ещё два совершенных числа:

$$496 = 2^{5-1} \cdot \left(2^5 - 1\right) \text{ и } 8128 = 2^{7-1} \cdot \left(2^7 - 1\right).$$

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа.

В XII веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа и тому, кто найдёт новое совершенное число, уготовано вечное блаженство.

Но и надежда на эту награду не смогла помочь математикам Средневековья. Следующее, пятое совершенное число было обнаружено лишь в XV веке. Оказалось, что и оно подчиняется условию Евклида.

Пятое совершенное число равно 33 550 336. В формуле Евклида ему соответствует $p = 13$.

Ещё через 200 лет француз Марен Мерсенн, математик и музыкант, друг Декарта и Ферма, заявил (без доказательств), что следующие шесть совершенных чисел также должны удовлетворять формуле Евклида со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Очевидно, что сам Мерсенн никак не мог проверить своё утверждение непосредственными вычислениями. Вычислить любое из чисел было нетрудно, но выяснить, простые это числа или нет, не представлялось возможным. Тогда так и осталось неизвестным, прав Мерсенн или нет.

Позднее было обнаружено, что итальянский математик Катальди тоже занимался поиском совершенных чисел. В его записках были указаны шестое и седьмое совершенные числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328, найденные почти за сотню лет до Мерсенна. Оказалось, что оба эти числа совпадают с теми, на которые указывал Мерсенн.

Леонард Эйлер сумел найти новую теорему о загадочных и таинственных совершенных числах. Он доказал, что все чётные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечётные совершенные числа и могут ли они вообще существовать — остаётся неизвестным и до сих пор.

Эйлер доказал, что первые три числа из указанных Мерсенном:

$$2^{17}-1,\ \ 2^{19}-1\ \text{ и }\ 2^{31}-1,$$

— действительно являются простыми. Шестое и седьмое совершенные числа, найденные Катальди, а позднее Мерсенном, оказались верными. И навсегда осталась в истории тайна, как они сумели их найти.

Таким образом, восьмое совершенное число, которому соответствует $p=31$ в формуле Евклида, равно

$$2\,305\,843\,008\,139\,952\,128.$$

В течение целого столетия это число оставалось наибольшим из совершенных чисел. За это время математикам удалось найти метод, с помощью которого, не производя прямых вычислений, можно установить, является ли число 2^p-1, где p — простое число, простым или нет. Оказалось, что не все предсказания Мерсенна были правильными. Он правильно предсказал значение $p=127$, но числа со значениями

$$p=67\ \text{ и }\ p=257,$$

вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Зато должны быть совершенными со значениями

$$p=61,\ \ p=89\ \text{ и }\ p=107.$$

Девятое совершенное число было вычислено в 1883 году. В нём оказалось 37 значащих цифр. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Он сумел вычислить самое большое для того времени простое число вида

$$2^p-1\ \text{ при }\ p=61$$

и соответствующее ему совершенное число.

Вычислив девятое совершенное число, И. М. Первушин поистине совершил подвиг. Мерсенн в своё время говорил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15–20 десятичных знаков. Первушин считал без всяких вычислительных приборов, а в его числе оказалось 37 цифр!

В начале XX столетия появились механические счётные машины, а в середине века — и первые компьютеры. С их помощью дело пошло быстрее.

На февраль 2013 года известно 48 простых чисел Мерсенна и соответствующих им чётных совершенных чисел.

До сих пор не решёнными являются и вопросы о наличии нечётного совершенного числа и существовании наибольшего совершенного числа.

Свойства совершенных чисел

Формула Евклида позволяет доказывать свойства совершенных чисел.

- ✓ Все чётные совершенные числа (кроме 6) являются суммой кубов последовательных нечётных натуральных чисел. Например,

$$28=1^3+3^3,\ \ 496=1^3+3^3+5^3+7^3.$$

- ✓ Все чётные совершенные числа являются треугольными числами; кроме того, они являются шестиугольными числами, то есть могут быть представлены в виде

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$

для некоторого натурального числа n. (Другими словами, взяв совершенное число шаров, мы всегда сможем сложить из них равносторонний треугольник или шестиугольник.)

- ✓ Сумма всех чисел, обратных делителям совершенного числа (включая его само), равна 2. Например, 28:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=2.$$

- ✓ Все чётные совершенные числа в двоичной записи содержат сначала p единиц, за которыми следует $p-1$ нулей. Например,

$$6_{10}=110_2,\ 28_{10}=11100_2,$$

$$33550336_{10}=1111111111111000000000000_2.$$

Не менее интересны свойства последних цифр совершенных чисел.

Пользуясь формулой Евклида, можно показать, что любое чётное совершенное число должно заканчиваться цифрой 6 или 8. Если число заканчивается восьмёркой, то ей непременно предшествует цифра 2. Если же чётное совершенное число заканчивается шестёркой, то его предпоследней цифрой должна быть 1, 3, 5 или 7 (исключениями являются лишь числа 6 и 496).

Последние цифры нескольких первых совершенных чисел образуют последовательность:

6, 8, 6, 8, 6, 6, 8, 8, 6, 6, 6, 8, 8, 6, 6, 6, 8, 6, 6, 6.

В ней явно ощущается некая закономерность: сначала цифры 6 и 8 чередуются, затем начинают чередоваться группы 66 и 88, их сменяет «одинокая» 6, вслед за которой идёт цифровой палиндром 6668666. Пытаются ли цифры что-то сказать нам или замеченный порядок случаен? До сих пор ещё никому не удавалось найти надёжное правило, позволяющее предсказывать последнюю цифру следующего, пока не известного совершенного числа. В то же время найти последнюю цифру любого совершенного числа, если известна его формула Евклида, совсем несложно.

Дружественные числа

Дружественными называют два различных натуральных числа, для которых сумма всех собственных делителей (т. е. делителей, отличных от самого числа) первого числа равна второму числу, и наоборот, сумма всех собственных делителей второго числа равна первому числу. Большого значения для теории чисел дружественные числа не имеют, но являются любопытным элементом занимательной математики.

К дружественным числам относятся и совершенные: каждое совершенное число дружественно самому себе.

Первая пара дружественных чисел 220 и 284 была известна ещё Пифагору. Возможно, он первым обратил на них внимание. Пифагорейцы считали их символом дружбы. Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284».

Формулу для нахождения некоторых пар дружественных чисел предложил примерно в 850 году арабский астроном и математик Сабит ибн Курра. Его формула позволила найти две новые пары дружественных чисел.

Многие античные и арабские учёные, а также учёные Средневековья посвящали в своих трактатах одну из глав дружественным числам. Однако там было мало новых сведений и много ошибок. Кроме того, авторы сочинений настаивают на возможности практического применения дружественных чисел. Так ибн Хальдун прилагает к своему трактату руководство по изготовлению талисмана дружбы, а мусульманский учёный аль-Маджрити приводит рецепт взаимной любви: «На чём-либо напишите числа 220 и 284, меньшее дайте объекту любви, а большее съешьте сами». Учёный утверждает, что действенность этого способа он проверил на себе.

Полагали, что пара дружественных чисел 17 296 и 18 416 была открыта Пьером Ферма лишь в 1636 году. Однако оказалось, что она была известна за три с половиной столетия до этого. В одном из трактатов арабского учёного Ибн ал-Банны была обнаружена следующая фраза: «Числа 17 296 и 18 416 дружественны. Аллах всеведущ».

Последующие пары дружественных чисел находили Декарт, Эйлер и Лежандр.

Поразительное открытие в 1867 году сделал 16-летний итальянец Никколо Паганини (тёзка знаменитого скрипача), обнаружив вторую по величине пару дружественных чисел 1184 и 1210 (ближайшую к 220 и 284), которую проглядели все знаменитые математики, изучавшие дружественные числа.

Общего способа нахождения пар дружественных чисел нет до сих пор. Неизвестно, конечно или бесконечно количество пар дружественных чисел. На сентябрь 2007 года известно 11 994 387 пар дружественных чисел. Все они состоят из чисел одной чётности. Существует ли чётно-нечётная пара дружественных чисел, неизвестно. Также неизвестно, существуют ли взаимно простые дружественные числа, но если такая пара дружественных чисел существует, то их произведение должно быть больше 10^{67}.

Литература

1. *Бухштаб А. А.* Теория чисел. — М. : Просвещение, 1966.
2. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю., Крафт Х., Янцен Е.* Живые числа. Пять экскурсий. — М. : Мир, 1985.
3. *Гарднер М.* Математические новеллы / пер. с англ. Ю. А. Данилова. — М. : Мир, 1974.
4. *Депман И.* Совершенные числа // Квант. — 1991. — № 5. — С. 13–17.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЁЗЫ

$$12345679\times9=111111111$$

$$12345679\times18=222222222$$

$$12345679\times27=333333333$$

$$12345679\times36=444444444$$

$$12345679\times45=555555555$$

$$12345679\times54=666666666$$

$$12345679\times63=777777777$$

$$12345679\times72=888888888$$

$$12345679\times81=999999999$$