ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Составитель О. А. Старова

Евклидова геометрия — это геометрическая теория, основанная на системе аксиом, впервые изложенной в «Началах» Евклида.

Евклид и его «Начала»

Попытки изложить важнейшие математические знания как единое целое в определённом порядке, связи и последовательности предпринимал ещё Гиппократ Хиосский (около 450–430 гг. до н. э.), но лишь Евклид смог завершить этот труд.

Евклид, который является автором ряда сочинений, в историю математики вошёл, прежде всего, как создатель «Начал» (по-гречески это значит «стихии, элементы», по-латыни сочинение называется Elementa).

«Начала» Евклида состоят из 13 книг, в содержание которых входит изучение геометрических фигур на плоскости и, поскольку для этого требуются числа, то и учение о целых (положительных) числах и дробях. Но так как отношение пространственных фигур не всегда можно выразить рациональными числами, то Евклид изучал также несоизмеримые геометрические величины. Наконец, исследование распространяется с плоскости на пространство, на вычисление площадей поверхностей и объёмов тел. Таким образом, в «Началах» излагались основы планиметрии, стереометрии и арифметики.

Каждая из 13 книг, на которые разделены «Начала» Евклида, начинается с определений; в первой книге к определениям присоединены 5 постулатов и несколько аксиом, число которых в различных списках колеблется от 5 до 9. Из этих предпосылок затем последовательно выводятся все предложения «Начал».

Характер определений у Евклида различен. В большинстве они описательны, например, определение первое книги I: «Точка есть то, что не имеет частей». Но наряду с описательными встречаются и номинальные (словесные) определения, вроде определения 19 книги I: «Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми...»; генетические (указывающие на способ происхождения объекта), например, определение 14 книги XI: «Сфера будет, если при неподвижности диаметра полукруга вращающийся полукруг снова вернётся в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то охваченная фигура и есть сфера» и, наконец, аксиоматические (т. е. такие, которые могут быть сформулированы в виде аксиом), например, определение 1 книги III: «Равные круги суть те, у которых диаметры равны или прямые из центра равны».

В современной трактовке слово «постулат» употребляют как название для аксиом некоторой математической теории; так ряд аксиом евклидовой геометрии в «Началах» Евклида названы постулатами.

По Евклиду постулаты — это требования построить некоторые простейшие фигуры, аксиомы — это общепризнанные положения, не требующие доказательства и лежащие в основе доказательства.

Постулаты

Допустим:

1. Что от всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.
2. И что ограниченную прямую [можно] непрерывно продолжать по прямой.
3. И что из всякого центра и всяким раствором [может быть] описан круг.
4. И что все прямые углы равны между собой.
5. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Общие понятия (аксиомы)

1. Равные одному и тому же равны и между собой.
2. И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
3. И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

[4. И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.

5. И удвоенные одного и того же равны между собой.
6. И половины одного и того же равны между собой].
7. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

8. И целое больше части.
[9. И две прямые не содержат пространства].

(Евклид. Начала. Т. I–III. Перевод и комментарии. Д. Д. Мордухай-Болтовского, при ред. участии И. Н. Веселовского.)

Пятый постулат Евклида имеет особый характер. Он не может быть подтверждён или опровергнут опытом. Поэтому в течение двух тысячелетий после Евклида многие математики пытались его доказать. Лишь в 1826 году русский математик Н. И. Лобачевский доказал, что это предложение нельзя вывести логически из других.

Историки, сравнивая «Начала» с сохранившимися более ранними греческими математическими сочинениями или свидетельствами о них, установили те части этого труда, в которых Евклид использовал открытия своих предшественников, привёл их в более строгую логическую систему. Так, считается общепризнанным, что книга V и, вероятно, первые пять предложений книги XIII принадлежат Евдоксу, часть книги X происходит от Теэтета. Тем не менее, и эти книги сохраняют общий стиль «Начал», вплоть до слов «что и требовалось доказать» или «что и требовалось построить», которыми заканчиваются предложения, в зависимости от того, являются ли они теоремами или «проблемами», т. е. задачами на построение (слово «проблема» в латинских текстах «Начал» употребляется именно в этом значении). Хотя лишь в редких случаях имеются конкретные указания на то, что то или иное предложение или его доказательство являются результатом оригинального творчества самого Евклида, не может быть сомнения, что автор этого замечательного труда был великим геометром. Гигантская задача систематизации обширного разнообразного материала, которую он столь блестяще выполнил, сама по себе была под силу лишь крупнейшему учёному. Этот труд является одной из самых распространённых книг, выдержавших на протяжении более чем двух тысячелетий большое количество изданий в переводах на многочисленные языки, в сокращённых и переработанных вариантах. До сих пор, несмотря на развитие, которое проделала за этот период геометрия, он служит образцом для учебников элементарной геометрии, по которым преподают в средней школе. Его высокую оценку не может умалить то обстоятельство, что с современной точки зрения мы находим логические недостатки как в определениях, так и в особенности в системе аксиом. Эти недостатки не колеблют прочности оснований геометрии, построенной Евклидом в его бессмертном труде.

Аксиоматика евклидовой геометрии

Современная система аксиом евклидовой геометрии опирается на шесть основных неопределяемых понятий (это три рода объектов — точка, прямая, плоскость — и три вида отношений между ними, которые выражают словами: «принадлежит», «между», «движение») и состоит из пяти групп.

Аксиомы принадлежности

- ✓ Через две точки можно провести прямую, и притом только одну.
- ✓ На каждой прямой лежат по крайней мере две точки. Существуют хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой.
- ✓ Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- ✓ На каждой плоскости есть по крайней мере три точки и существуют хотя бы четыре точки, не лежащие в одной плоскости.
- ✓ Если две точки данной прямой лежат на данной плоскости, то и сама прямая лежит на этой плоскости.
- ✓ Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ещё одну общую точку (и следовательно, общую прямую).

Аксиомы порядка

- ✓ Если точка B лежит между точками A и C, то все три точки лежат на одной прямой.
- ✓ Для каждых точек A и B существует такая точка C, что B лежит между A и C.
- ✓ Из трёх точек прямой только одна лежит между двумя другими.
- ✓ Аксиома Паша. Если прямая пересекает одну сторону треугольника, то она пересекает ещё другую сторону или проходит через вершину.

Аксиомы движения

- ✓ Движение ставит в соответствие точкам точки, прямым — прямые, плоскостям — плоскости, сохраняя принадлежность точек прямым и плоскостям.
- ✓ Два последовательных движения дают опять движение, и для всякого движения есть обратное.

- Если даны точки A, B и полуплоскости α, β, ограниченные продолженными полупрямыми, которые исходят из точек A, B, то существует движение, и притом единственное, переводящее A, a, α в B, b, β.

Аксиомы непрерывности

- Аксиома Архимеда. Всякий отрезок AB можно перекрыть меньшим отрезком AA_1, откладывая его на AB достаточное число раз.
- Аксиома Кантора. Если дана бесконечная последовательность вложенных отрезков A_nB_n, то существует, и притом единственная, точка C, принадлежащая всем отрезкам A_nB_n.

Аксиома параллельности

- Через данную точку вне данной прямой можно провести на плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную, то есть не более одной прямой, параллельной данной.

С помощью основных понятий определяются все остальные понятия евклидовой геометрии. Все предложения о свойствах геометрических фигур, не содержащиеся в аксиомах евклидовой геометрии, должны быть доказаны логическим выводом из этих аксиом. Система аксиом евклидовой геометрии обладает свойством полноты и непротиворечивости. Если в аксиоматике евклидовой геометрии заменить аксиому параллельности, то полученная новая система аксиом (система аксиом геометрии Лобачевского) тоже непротиворечива, так что аксиома параллельности не зависит от остальных аксиом евклидовой геометрии.

Интерпретация евклидовой геометрии

Объекты, удовлетворяющие системе аксиом евклидовой геометрии, допускают конкретные истолкования (интерпретации). Обычная интерпретация евклидовой геометрии, возникшей как отражение фактов действительности, связана с наглядными представлениями об окружающем мире. Вся геометрическая терминология свидетельствует о том, что понятия о геометрических образах — это абстракция от реальных предметов. Например, слово «точка» происходит от глагола «ткнуть»; слово «линия» — от латинского «лён», «льняная нить», то есть понятие «линия» является абстракцией от тонкой льняной нити, понятие «прямая линия» — абстракция натянутой льняной нити.

В «Началах» Евклида содержится описание основных объектов как абстракций от реальных предметов окружающего мира. Однако объекты, удовлетворяющие системе аксиом евклидовой геометрии, допускают множество интерпретаций. Так, в декартовой интерпретации евклидовой геометрии на плоскости точкой называют любую пару действительных чисел x и y, взятых в определённом порядке $(x;y)$; числа x и y называют координатами точки. Прямая — это совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax+by+c=0$$

(уравнению прямой). Точка принадлежит прямой, если её координаты удовлетворяют уравнению прямой. Отношения порядка точек на прямой также определяются некоторыми алгебраическими условиями.

При таком конкретном понимании точек и прямых и отношений между ними каждая из аксиом евклидовой геометрии представляет собой некоторое утверждение, относящееся к действительным числам, и имеет место в силу соответствующих предложений арифметики. Поэтому система аксиом евклидовой геометрии непротиворечива, если непротиворечива система аксиом арифметики.

Литература

1. *Кольман Э.* История математики в древности. — М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
2. *История* математики с древнейших времен до начала XIX столетия : в 3-х томах / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Наука, 1970. — Т. 3.
3. *Болгарский Б. В.* Очерки по истории математики. — 2-е изд., исправленное и дополненное — Минск. : Вышэйшая школа, 1979.
4. *Математический* энциклопедический словарь / под ред. Ю. В. Прохорова. — М. : Советская энциклопедия, 1988.
5. *Хрестоматия* по истории математики / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Просвещение, 1976.

Читайте в следующем номере:

«Элементарная геометрия».